

# 一种可变步长傅里叶分析器的统计特性分析

温 良<sup>1,2</sup>, 黄博妍<sup>1</sup>, 魏 国<sup>1</sup>, 孙金玮<sup>1</sup>, 沈 毅<sup>1</sup>

(1. 哈尔滨工业大学自动化测试与控制系, 黑龙江哈尔滨 150001; 2. 96361 部队, 青海西宁 810000)

**摘 要:** 可变步长最小均方(Variable step-size LMS, VSS-LMS)算法的傅里叶分析器在稳态误差、收敛速度及追踪能力方面具有优异性能, 对其进行全面的统计特性分析具有重要意义. 本文基于误差服从高斯分布等假设在平均及均方意义下, 推导出描述系统动态特性的差分方程组, 完成系统的动态数学建模, 进而对系统进行稳态性能分析, 给出系统稳态误差关于参考信号频率、系统参数和附加噪声的表达式, 为系统应用中的参数选取提供有效指导. 仿真表明, 本文建立的统计模型与仿真结果具有一致性, 验证了分析的有效性.

**关键词:** 自适应傅里叶分析器; 可变步长最小均方算法; 统计特性分析; 追踪性能; 收敛性

**中图分类号:** TB535 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2015)09-1763-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.09.1013

## Statistical Analysis for a Variable Step-Size Fourier Analyzer

WEN Liang<sup>1,2</sup>, HUANG Bo-yan<sup>1</sup>, WEI Guo<sup>1</sup>, SUN Jin-wei<sup>1</sup>, SHEN Yi<sup>1</sup>

(1. Department of Automatic Test and Control, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China;  
2. 96361 PLA Troops, Xining, Qinghai 810000, China)

**Abstract:** Fourier analyzer, based on variable step-size least mean square (LMS) algorithm, enjoys fast convergence, good tracking capability and small steady state errors. Thus, a thorough statistical analysis of the Fourier analyzer is of great significance. In this paper, differential equations governing the dynamic of the system are derived in the mean and mean square sense on the premise that the error signals obey Gauss distribution. Closed-form expressions indicating relationships of steady-state error, reference signal frequencies, system parameters and addictive noise are carried out for steady-state performance analysis, which can serve as the fundamental principle for system parameter selection. Numerous simulations confirm the validity of the analytical findings.

**Key words:** adaptive Fourier analyzer; variable step-size least mean square (VSS-LMS); statistical analysis; tracking capability; convergence

## 1 引言

自适应傅里叶分析是一种强大的周期性信号的估计工具, 其在数字通信、电力工程、语音信号处理、音乐信号处理、生物医学工程、控制系统等领域应用广泛<sup>[1~4]</sup>. 自适应控制算法是自适应傅里叶分析系统的核心, 较为常用的包括最小均方(Least Mean Square, LMS)算法、p-power 算法、递归最小二乘(Recursive Least-square, RLS)算法以及卡尔曼滤波技术等<sup>[2~6]</sup>. 而这些算法当中, 可变步长最小均方(Variable step-size LMS, VSS-LMS)算法在解决系统收敛速度和稳态误差矛盾的问题上表现出了突出的性能, 目前已有多种 VSS-LMS 算法被提出<sup>[7~13]</sup>, 并广泛的应用于自适应频率估计<sup>[10]</sup>、网络回

声消除<sup>[11]</sup>、主动噪声控制<sup>[12,13]</sup>等信号处理领域.

关于 VSS-LMS 算法的理论分析是一个重要的研究课题, 由于包含复杂的数学理论, 其始终是一个公认的难点. Kwong 和 Johnston 提出了一种变步长算法, 在独立性假设的基础上进行了简单的数学分析<sup>[14]</sup>; Evans 等对两种变步长算法进行了统计分析, 给出了方程系数一次和二次的失调量以及系统收敛条件<sup>[15]</sup>; Shin 和 Lee 通过几个简单的假设分析认为, 算法的稳态误差取决于初始步长的选取, 步长越大稳态误差越大<sup>[16]</sup>, 然而 Mathews 和 Xie 等通过仿真及数学分析却表明, 步长在初始阶段快速增大之后将开始缓慢而平稳的减小, 从而产生较小的失调误差<sup>[17]</sup>; Aboulnasr 和 Mayyas 提出了一种改进的变步长最小均方算法(MVSS-LMS), 通过仿真发现上述

几种变步长算法很容易受到附加噪声的干扰,而其提出的算法性能却非常稳定,其通过古典特征值分析方法推导了算法的近似稳态表达式,推导过程包含复杂的矩阵运算,而且文中并未就理论模型的准确性进行仿真验证,从而无法证明分析结果的准确性<sup>[18]</sup>,然而其分析方法为我们即将开展的算法分析提供了重要的借鉴.

Xiao 和 Huang 等新提出了一种 VSS-LMS 算法<sup>[12]</sup>,并首次将变步长思想融入傅里叶分析中,该算法收敛速度快、追踪能力强且估计误差小,但其仅对所提算法进行了仿真研究,对该算法的统计特性分析尚未进行<sup>[13]</sup>.为此,本文将对该算法进行理论分析,从统计意义上对系统自适应参数的收敛特性进行建模,推导出描述系统动态特性和稳态均方误差的完整、准确的表达式,揭示系统参数间的耦合关系,为算法实际应用提供有效指导.

## 2 可变步长傅里叶分析器

### 2.1 传统的傅里叶分析器

图 1 为传统傅里叶分析器的系统框图,通过该系统可估计每个目标噪声频率分量的离散傅里叶系数(Discrete Fourier Coefficient, DFC).

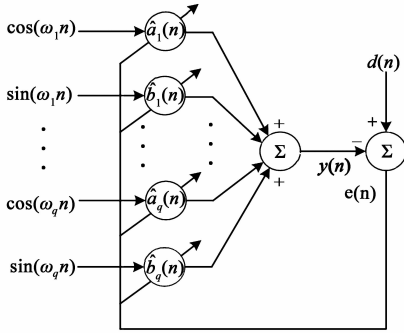


图1 傅里叶分析系统框图

目标噪声  $d(n)$  和误差信号  $e(n)$  的表达式为

$$d(n) = \sum_{i=1}^q [a_i x_{a_i}(n) + b_i x_{b_i}(n)] + v(n) \quad (1)$$

$$e(n) = d(n) - \sum_{i=1}^q [\hat{a}_i(n) x_{a_i}(n) + \hat{b}_i(n) x_{b_i}(n)] \quad (2)$$

其中,  $x_{a_i}(n) = \cos(\omega_i n)$ ,  $x_{b_i}(n) = \sin(\omega_i n)$ ,  $q$  为目标噪声的个数,  $[a_i(n), b_i(n)]$  为目标噪声的 DFC,  $[\hat{a}_i(n), \hat{b}_i(n)]$  为 DFC 的估计,  $\omega_i$  是第  $i$  个频率分量,  $v(n)$  是方差为  $\sigma_v^2$  的白噪声<sup>[4]</sup>.

### 2.2 可变步长傅里叶分析器

可变步长傅里叶分析器的核心是通过可变步长 LMS 算法对 DFC 进行估计,其算法表达式为<sup>[12,13]</sup>

$$\begin{cases} \hat{a}_i(n+1) = \hat{a}_i(n) + \mu_i(n) e(n) x_{a_i}(n) \\ \hat{b}_i(n+1) = \hat{b}_i(n) + \mu_i(n) e(n) x_{b_i}(n) \end{cases} \quad (3)$$

$$\mu_i(n) = \xi_i \mu_i(n-1) + \eta_i e(n) x_{a_i}(n) e(n-1) x_{a_i}(n-1) \quad (4)$$

其中,  $\mu_i(n)$  为可变步长,  $\xi_i$  是一个接近于 1 的正常数,  $\eta_i$  为非常小的正常数.

## 3 VSS-LMS 算法的统计性分析

### 3.1 分析条件

本文对系统进行的统计特性分析是建立在如下假设基础之上:

假设 A: 输入参考信号为均值为零的稳定高斯信号;

假设 B: 附加噪声信号为均值为零、方差为  $\sigma_v^2$  的高斯白噪声,其与任何信号之间统计性独立;

假设 C: 为了降低系统建模难度,将步长  $\mu_i(n)$  前移一步来降低它与误差信号  $e(n)$  之间的相关性,这样变换后的步长更新公式为

$$\mu_i(n+1) = \xi_i \mu_i(n) + \eta_i e(n) x_{a_i}(n) e(n-1) x_{a_i}(n-1) \quad (5)$$

假设 D: 误差信号  $e(n)$  服从高斯分布.

### 3.2 系统动态性能分析

#### 3.2.1 平均意义下的动态分析

将式(2)合并整理,误差信号  $e(n)$  可以表示为

$$e(n) = \sum_{i=1}^q \{ [a_i - \hat{a}_i(n)] x_{a_i}(n) + [b_i - \hat{b}_i(n)] x_{b_i}(n) \} + v(n) \quad (6)$$

我们定义 DFC 的估计偏差为

$$\varepsilon_{\hat{a}_i}(n) = a_i - \hat{a}_i(n) \quad (7)$$

$$\varepsilon_{\hat{b}_i}(n) = b_i - \hat{b}_i(n) \quad (8)$$

进而误差信号又可表示为

$$e(n) = \sum_{i=1}^q [\varepsilon_{\hat{a}_i}(n) x_{a_i}(n) + \varepsilon_{\hat{b}_i}(n) x_{b_i}(n)] + v(n) \quad (9)$$

将式(7)~式(9)代入 VSS-LMS 算法的更新式(3)中,并对式两边取集平均( $E[\cdot]$ ).在这个过程中,我们将两个正余弦分量  $x_{a_i}(n)$  和  $x_{b_i}(n)$  视为确定值,最终可得平均意义下 DFC 估计偏差的收敛递归式:

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_{\hat{a}_k}(n+1)] &= \{1 - E[\mu_k(n)] x_{a_k}^2(n)\} E[\varepsilon_{\hat{a}_k}(n)] \\ &\quad - E[\mu_k(n)] x_{a_k}(n) x_{b_k}(n) E[\varepsilon_{\hat{b}_k}(n)] \\ &\quad - E[\mu_k(n)] x_{a_k}(n) \sum_{j=1, j \neq k}^q \{x_{a_j}(n) E[\varepsilon_{\hat{a}_j}(n)] \\ &\quad + x_{b_j}(n) E[\varepsilon_{\hat{b}_j}(n)]\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& E[\varepsilon_{\hat{b}_k}(n+1)] \\
&= \{1 - E[\mu_k(n)]x_{b_k}^2(n)\} E[\varepsilon_{b_k}(n)] \\
&\quad - E[\mu_k(n)]x_{a_k}(n)x_{b_k}(n)E[\varepsilon_{\hat{a}_k}(n)] \\
&\quad - E[\mu_k(n)]x_{b_k}(n)\sum_{j=1, j \neq k}^q \{x_{a_j}(n)E[\varepsilon_{\hat{a}_j}(n)] \\
&\quad + x_{b_j}(n)E[\varepsilon_{\hat{b}_j}(n)]\} \\
\end{aligned} \tag{11}$$

其中,步长的递归公式为:

$$\begin{aligned}
& E[\mu_k(n+1)] \\
&= \xi_k E[\mu_k(n)] + \eta_k E[e(n)e(n-1)]x_{a_k}(n)x_{a_k}(n-1) \\
\end{aligned} \tag{12}$$

### 3.2.2 均方意义下的动态分析

为了完整的描述系统的动态特性,下面给出均方意义下的系统动态模型.由式(3)、(7)和(8)得

$$\begin{aligned}
& E[\varepsilon_{\hat{a}_k}^2(n+1)] \\
&= E[\varepsilon_{\hat{a}_k}^2(n)] - 2E[\mu_k(n)]E[e(n)\varepsilon_{\hat{a}_k}(n)]x_{a_k}(n) \\
&\quad + E[\mu_k^2(n)]E[e^2(n)]x_{a_k}^2(n) \\
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
& E[\varepsilon_{\hat{b}_k}^2(n+1)] \\
&= E[\varepsilon_{\hat{b}_k}^2(n)] - 2E[\mu_k(n)]E[e(n)\varepsilon_{\hat{b}_k}(n)]x_{b_k}(n) \\
&\quad + E[\mu_k^2(n)]E[e^2(n)]x_{b_k}^2(n) \\
\end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}
& E[e(n)\varepsilon_{\hat{a}_k}(n)] \\
&= x_{b_k}(n)E[\varepsilon_{\hat{a}_k}(n)]E[\varepsilon_{b_k}(n)] + x_{a_k}(n)E[\varepsilon_{\hat{a}_k}^2(n)] \\
&\quad + \sum_{j=1, j \neq k}^q \{x_{a_j}(n)E[\varepsilon_{\hat{a}_j}(n)]E[\varepsilon_{\hat{a}_k}(n)] \\
&\quad + x_{b_j}(n)E[\varepsilon_{\hat{b}_j}(n)]E[\varepsilon_{\hat{a}_k}(n)]\} \\
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
& E[e(n)\varepsilon_{\hat{b}_k}(n)] \\
&= x_{a_k}(n)E[\varepsilon_{\hat{a}_k}(n)]E[\varepsilon_{b_k}(n)] + x_{b_k}(n)E[\varepsilon_{\hat{b}_k}^2(n)] \\
&\quad + \sum_{j=1, j \neq k}^q \{x_{a_j}(n)E[\varepsilon_{\hat{a}_j}(n)]E[\varepsilon_{\hat{b}_k}(n)] \\
&\quad + x_{b_j}(n)E[\varepsilon_{\hat{b}_j}(n)]E[\varepsilon_{\hat{b}_k}(n)]\} \\
\end{aligned} \tag{16}$$

将式(5)两边平方并取集平均可得均方意义下步长的递归表达式:

$$\begin{aligned}
& E[\mu_k^2(n+1)] \\
&= \xi_k^2 E[\mu_k^2(n)] + \eta_k^2 E[e^2(n)e^2(n-1)]x_{a_k}^2(n)x_{a_k}^2(n-1) \\
&\quad + 2\xi_k \eta_k E[\mu_k(n)]E[e(n)e(n-1)]x_{a_k}(n)x_{a_k}(n-1) \\
\end{aligned} \tag{17}$$

均方意义的误差表达式如下

$$\begin{aligned}
& E[e^2(n)] \\
&= \sum_{i=1}^q \{x_{a_i}^2(n)E[\varepsilon_{\hat{a}_i}^2(n)] + 2x_{a_i}(n)x_{b_i}(n) \\
&\quad \cdot E[\varepsilon_{\hat{a}_i}(n)]E[\varepsilon_{\hat{b}_i}(n)] + x_{b_i}^2(n)E[\varepsilon_{\hat{b}_i}^2(n)]\} \\
&\quad + \sum_{i_1=1}^q \sum_{i_2=1, i_2 \neq i_1}^q \{x_{a_{i_1}}(n)x_{a_{i_2}}(n)E[\varepsilon_{\hat{a}_{i_1}}(n)]E[\varepsilon_{\hat{a}_{i_2}}(n)] \\
&\quad + x_{a_{i_1}}(n)x_{b_{i_2}}(n)E[\varepsilon_{\hat{a}_{i_1}}(n)]E[\varepsilon_{\hat{b}_{i_2}}(n)] \\
&\quad + x_{b_{i_1}}(n)x_{a_{i_2}}(n)E[\varepsilon_{\hat{b}_{i_1}}(n)]E[\varepsilon_{\hat{a}_{i_2}}(n)] \\
&\quad + x_{b_{i_1}}(n)x_{b_{i_2}}(n)E[\varepsilon_{\hat{b}_{i_1}}(n)]E[\varepsilon_{\hat{b}_{i_2}}(n)]\} + \sigma_v^2 \\
\end{aligned} \tag{18}$$

类似的  $E[e(n)e(n-1)]$  可以表示为

$$\begin{aligned}
& E[e(n)e(n-1)] \\
&\approx \sum_{i=1}^q \{x_{a_i}(n)x_{a_i}(n-1)E[\varepsilon_{\hat{a}_i}^2(n)] \\
&\quad + x_{b_i}(n)x_{b_i}(n-1)E[\varepsilon_{\hat{b}_i}^2(n)] + [x_{a_i}(n)x_{b_i}(n-1) \\
&\quad + x_{b_i}(n)x_{a_i}(n-1)]E[\varepsilon_{\hat{a}_i}(n)]E[\varepsilon_{\hat{b}_i}(n)]\} \\
&\quad + \sum_{i_1=1}^q \sum_{i_2=1, i_2 \neq i_1}^q \{x_{a_{i_1}}(n)x_{a_{i_2}}(n-1)E[\varepsilon_{\hat{a}_{i_1}}(n)]E[\varepsilon_{\hat{a}_{i_2}}(n)] \\
&\quad + x_{a_{i_1}}(n)x_{b_{i_2}}(n-1)E[\varepsilon_{\hat{a}_{i_1}}(n)]E[\varepsilon_{\hat{b}_{i_2}}(n)] \\
&\quad + x_{b_{i_1}}(n)x_{a_{i_2}}(n-1)E[\varepsilon_{\hat{b}_{i_1}}(n)]E[\varepsilon_{\hat{a}_{i_2}}(n)] \\
&\quad + x_{b_{i_1}}(n)x_{b_{i_2}}(n-1)E[\varepsilon_{\hat{b}_{i_1}}(n)]E[\varepsilon_{\hat{b}_{i_2}}(n)]\} \\
&\quad - \sigma_v^2 \left\{ \sum_{i=1}^q \{\mu_i(n-1)[x_{a_i}(n)x_{a_i}(n-1) \right. \\
&\quad \left. + x_{b_i}(n)x_{b_i}(n-1)]\} \right\} \\
\end{aligned} \tag{19}$$

在上述递归公式的推导过程中用到了近似表达式:  $\varepsilon_{\hat{a}_i}(n-1) \approx \varepsilon_{\hat{a}_i}(n)$ ,  $\varepsilon_{\hat{b}_i}(n-1) \approx \varepsilon_{\hat{b}_i}(n)$ , 而当系统逐渐达到稳态时,DFC 的估计将达到最优,由该近似所产生的误差将不再存在.

假设  $e(n)$  和  $e(n-1)$  服从联合高斯分布可得下式,其详细推导过程参见文献[19],在此不再赘述.

$$\begin{aligned}
& E[e^2(n)e^2(n-1)] \\
&= 2E^2[e(n)e(n-1)] + E^2[e(n)]E^2[e(n-1)] \\
&\quad - 2E^2[e(n)]E^2[e(n-1)] \\
\end{aligned} \tag{20}$$

至此,式(10)~式(20)构成了 VSS-LMS 算法的傅里叶分析系统动态模型.

### 3.3 算法稳态性能分析

系统达到稳态,DFC 的估计偏差将趋近零,即

$$E[\varepsilon_{\hat{a}_i}(n+1)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = E[\varepsilon_{\hat{a}_i}(n)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = 0 \tag{21}$$

$$E[\varepsilon_{\hat{b}_i}(n+1)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = E[\varepsilon_{\hat{b}_i}(n)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = 0 \tag{22}$$

而估计偏差的均方为

$$E[\varepsilon_{a_i}^2(n+1)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = E[\varepsilon_{a_i}^2(n)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = E[\varepsilon_{a_i}^2(\infty)] \quad (23)$$

$$E[\varepsilon_{b_i}^2(n+1)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = E[\varepsilon_{b_i}^2(n)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = E[\varepsilon_{b_i}^2(\infty)] \quad (24)$$

这里引入时间平均的概念( $E_T[\cdot]$ ),并假设

$$E_T[\varepsilon_{a_i}(n+1)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = E_T[\varepsilon_{a_i}(n)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = 0 \quad (25)$$

$$E_T[\varepsilon_{b_i}(n+1)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = E_T[\varepsilon_{b_i}(n)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = 0 \quad (26)$$

$$E_T[\varepsilon_{a_i}^2(n+1)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = E_T[\varepsilon_{a_i}^2(n)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = E_T[\varepsilon_{a_i}^2(\infty)] \quad (27)$$

$$E_T[\varepsilon_{b_i}^2(n+1)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = E_T[\varepsilon_{b_i}^2(n)] \Big|_{n \rightarrow \infty} = E_T[\varepsilon_{b_i}^2(\infty)] \quad (28)$$

在稳态时,对式(13)和式(14)取时间平均可得:

$$\begin{aligned} E_T[2E[\mu_k(n)]E[e(n)\varepsilon_{a_i}(n)]x_{a_i}(n)] \Big|_{n \rightarrow \infty} \\ = E_T[E[\mu_k^2(n)]E[e^2(n)]x_{a_i}^2(n)] \Big|_{n \rightarrow \infty} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} E_T[2E[\mu_k(n)]E[e(n)\varepsilon_{b_i}(n)]x_{b_i}(n)] \Big|_{n \rightarrow \infty} \\ = E_T[E[\mu_k^2(n)]E[e^2(n)]x_{b_i}^2(n)] \Big|_{n \rightarrow \infty} \end{aligned} \quad (30)$$

经过复杂的中间推导过程可得到式(31)~(34):

$$(1-\xi_k)E_T[\mu_k(\infty)] = \frac{1}{2}\rho_k\eta_k \frac{\sigma_v^2}{2-\mu_{dsum}} \sum_{i=1}^q \rho_i \frac{E_T[\mu_i^2(\infty)]}{E_T[\mu_i(\infty)]} \quad (31)$$

其中  $\rho_i = \cos\omega_i$ ,  $\rho_k = \cos\omega_k$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, q$ .

$$\sum_{i=1}^q \rho_i \frac{E[\mu_i^2(\infty)]}{E[\mu_i(\infty)]} = \frac{2}{\sigma_v} \sqrt{\sum_{i=1}^q \frac{1-\xi_i}{\eta_i} E[\mu_i^2(\infty)]} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} (1-\xi_k^2)E_T[\mu_k^2(\infty)] &= \eta_k^2 \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\rho_k^2 \right) \\ &\times \left\{ \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^q E_T[\varepsilon_{a_i}^2(\infty)] + \sigma_v^2 \right]^2 + 2 \left[ \sum_{i=1}^q \rho_i E_T[\varepsilon_{a_i}^2(\infty)] \right]^2}_{(33)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \left( \frac{2\sigma_v^2}{2-\mu_{dsum}} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sigma_v^2}{2-\mu_{dsum}} \sum_{i=1}^q \rho_i \frac{E_T[\mu_i^2(\infty)]}{E_T[\mu_i(\infty)]} \right)^2 \\ &= \left( \frac{2\sigma_v^2}{2-\mu_{dsum}} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^q \rho_i \frac{E_T[\mu_i^2(\infty)]}{E_T[\mu_i(\infty)]} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (34)$$

其中,  $\mu_{dsum} = \sum_{i=1}^q \frac{E_T[\mu_i^2(\infty)]}{E_T[\mu_i(\infty)]}$ .

为保证系统稳定,步长会收敛到一个很小的值,通常其数量级在  $10^{-3}$  以下,因此  $\mu_{dsum}$  及其每个频率分量都远小于 1,于是有  $S$  的近似值,即

$$S \approx \sigma_v^4 \quad (35)$$

将式(35)代入式(33)可以得到

$$E_T[\mu_k^2(\infty)] = \frac{\eta_k^2}{1-\xi_k^2} \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\rho_k^2 \right) \sigma_v^4 \quad (36)$$

由式(31)、(32)和(36)联立,可得时间平均的步长稳态表达式

$$E_T[\mu_k(\infty)] = \frac{\eta_k \sigma_v^3 \rho_k}{4(1-\xi_k)} \sqrt{\sum_{i=1}^q \frac{\eta_i}{1+\xi_i} \left( \frac{1}{2} + \rho_i^2 \right)} \quad (37)$$

进一步可得 DFC 估计偏差 MSE 近似表达式

$$\begin{aligned} E_T[\varepsilon_{a_i}^2(\infty)] \\ \approx \frac{\sigma_v^3}{2\rho_k} \frac{\eta_k}{1+\xi_k} \left( \frac{1}{2} + \rho_k^2 \right) \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^q \frac{\eta_i}{1+\xi_i} \left( \frac{1}{2} + \rho_i^2 \right)}} \end{aligned} \quad (38)$$

最后,时间平均的残余误差的稳态 MSE 为

$$\begin{aligned} E_T[e^2(\infty)] &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \{ E_T[\varepsilon_{a_i}^2(\infty)] + E_T[\varepsilon_{b_i}^2(\infty)] \} + \sigma_v^2 \\ &= \sum_{i=1}^q E_T[\varepsilon_{a_i}^2(\infty)] + \sigma_v^2 \end{aligned} \quad (39)$$

至此,VSS-LMS 算法的傅里叶分析系统的稳态表达式推导完成.可以发现,时间平均的离散傅里叶系数 MSE、步长及步长的均方是由步长的系数、输入信号频率、附加噪声共同决定的,且与附加噪声  $\sigma_v^2$  及步长系数  $\eta$  成正比关系.残余噪声的能量由白噪声和离散傅里叶系数的各个频率的 MSE 之和两部分组成.

## 4 仿真与讨论

文献[12]、[13]中已经详细的给出了 VSS-LMS 算法和其它方法的性能比较,本文仿真旨在验证理论分析的有效性和可靠性,为此我们进行了大量的动态和稳态仿真,每次仿真进行 1000 次独立循环取平均以获得统计性的结果.为了模拟环境中的非平稳噪声突变的过程,在迭代进行的中间使得傅里叶系数发生翻转.目标噪声由三个频率信号( $q=3$ )组成,其频率分别为  $\omega_1 = 0.1\pi$ 、 $\omega_2 = 0.2\pi$  和  $\omega_3 = 0.3\pi$ ,对应的 DFC 分别为  $a_1 = 2.0$ 、 $b_1 = -1.0$ 、 $a_2 = 1.0$ 、 $b_2 = -0.5$ 、 $a_3 = 0.5$  和  $b_3 = 0.1$ ,附加白噪声的方差为  $\sigma_v^2$ ,由于  $\xi$  是接近于 1 的数,其取值通常较容易确定,为了方便考察其他参数对系统的影响,我们令系数  $\xi = 0.998$ .

### 4.1 动态仿真

为了研究考察步长参数  $\eta$  和附加噪声  $\sigma_v^2$  分别对系统的影响,我们分为 A 和 B 两种情况进行仿真,给出仿真结果.

**仿真 A** 固定步长控制参数  $\eta = 0.0001$ ,附加噪声

的方差  $\sigma_v^2$  分别取 0.01、0.0625 和 0.1 时,给出离散傅里叶系数和步长序列的理论和仿真对比曲线.图 2(a)和图 2(b)分别为非平稳噪声的离散傅里叶系数的平均估

计偏差及均方误差,图 2(c)和图 2(d)分别为步长序列的均值与均方误差.

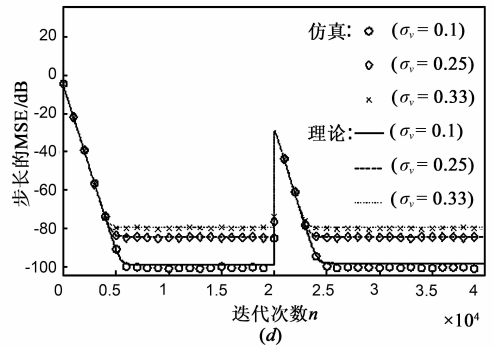
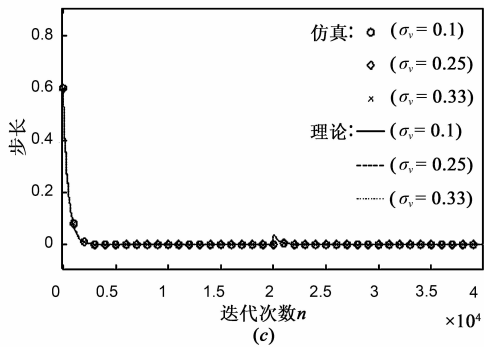
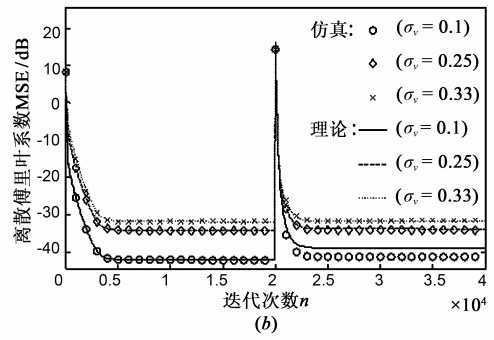
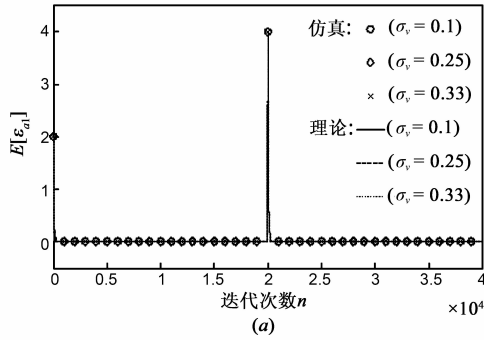


图2 固定步长控制参数时DFC及步长序列的理论和仿真对比曲线

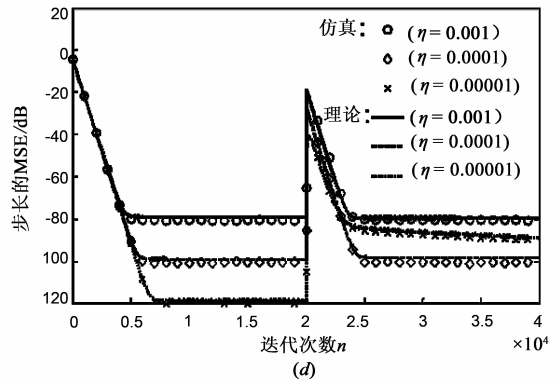
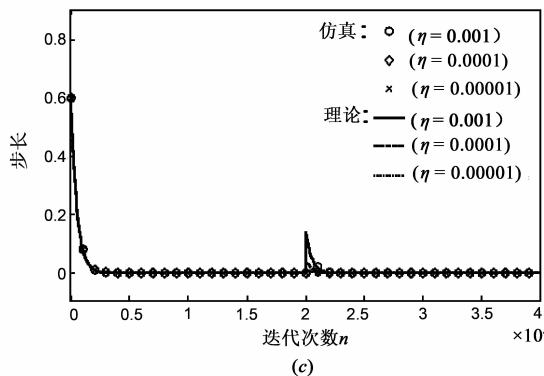
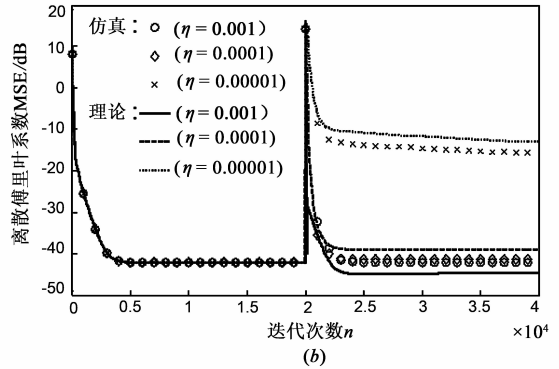
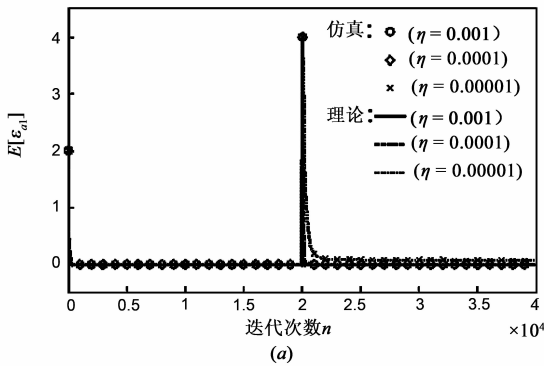


图3 固定附加噪声时DFC及步长序列的理论和仿真对比曲线

**仿真 B** 与仿真 A 相似,固定附加噪声方差为  $\sigma_v^2 = 0.01$ ,步长控制参数  $\eta$  分别取 0.001、0.0001 和 0.00001 时,给出离散傅里叶系数和步长序列的理论和仿真对比曲线.图 3(a)和图 3(b)分别为非平稳噪声的离散傅里叶系数的平均估计偏差及均方误差,图 3(c)和图 3(d)分别为步长序列的均值与均方误差.

#### 4.2 稳态仿真

通过系统的稳态表达式,可发现 DFC 的 MSE 主要受  $\eta$  和  $\sigma_v^2$  的影响.为此,我们绘制了 DFC 稳态 MSE 之和随着  $\sigma_v^2$  和  $\eta$  变化的理论和仿真三维曲线,该值由式  $(\sum_{i=1}^q \{E_T[\varepsilon_{a_i}^2(\infty)] + E_T[\varepsilon_{b_i}^2(\infty)]\})$  计算得到,进而给出理论和仿真的绝对偏差三维图,如图 4 所示.

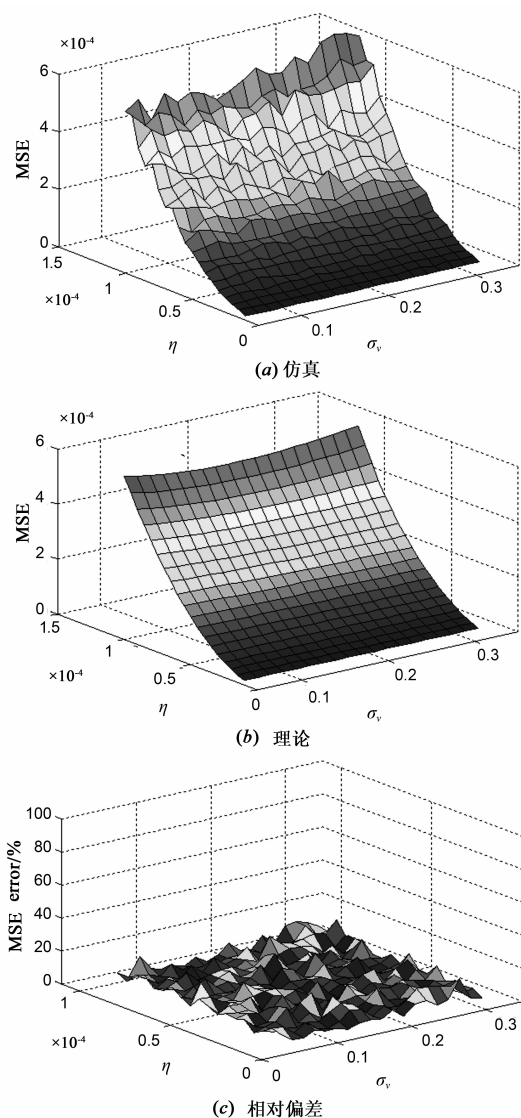


图4 DFC稳态MSE之和的理论仿真对比曲线

#### 4.3 仿真结果讨论

通过以上的理论和仿真曲线的对比分析,我们可

以得出如下结论:

(1)如图 2 和图 3 所示,在自适应初期阶段和 DFC 突变阶段,自适应算法控制步长为较大的量,控制系统快速收敛,从而提高系统的收敛速度和追踪性能,随着收敛趋于稳态,步长自适应地调整为较小的值,最终达到较小的稳态值.

(2)图 2 中,当步长控制参数固定时,随着附加噪声取值的增大,DFC 和步长的 MSE 也相应的变大;图 3 中,当附加噪声固定时,随着步长控制参数取值的减小,DFC 和步长的 MSE 也相应的减小.印证了本文分析的结论,即时间平均的 DFC 和步长的 MSE 与附加噪声及步长系数成正比关系.

(3)步长系数  $\eta$  控制着步长序列的动态,其对系统的收敛速度和稳态性能起到至关重要的作用,当附加噪声的方差固定时,步长系数  $\eta$  在 0.0001 附近,系统的动态较为稳定,而当  $\eta$  的取值较小(0.00001)时,DFC 出现翻转后系统收敛过慢,当  $\eta$  的取值较大(0.001)时,系统的稳态误差过大.

(4)在本文附加噪声  $\sigma_v^2$  及步长系数  $\eta$  仿真实验范围内,若选择合适的控制参数  $\eta$ ,理论分析和仿真结果具有高度的一致性,可以准确的描述系统的动态过程;若控制参数  $\eta$  的取值过大或者过小,在 DFC 出现非平稳的跳变时,理论解析和仿真结果之间会有些偏差,但仍可以跟踪系统的动态趋势,表明本文前面的近似和假设是可行的.

(5)当附加噪声很大步长系数很小时,稳态的理论和仿真结果的偏差局部可达到 12.37%,这是由于步长系数取值过小,导致 200000 点的仿真还没达到真正的稳态,在实际参数选取时可以将这部分偏差较大的值剔除;而在  $\eta \in [0.00005, 0.0001]$  和  $\sigma \in [0.05, 0.33]$  范围内,系统总体的平均偏差为 3.25%,理论解析和仿真结果重合度很高,表明理论解析可很好地描述系统的动态和稳态性能.

## 5 结论

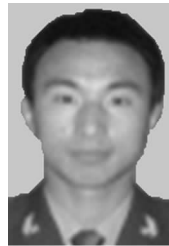
本文对一种基于可变步长最小均方算法的傅里叶分析器进行了统计特性分析及仿真.首先,利用统计理论分别在平均和均方意义下建立了描述傅里叶分析系统动态特性的差分方程组,完成了系统动态建模;其次,推导出了系统的稳态表达式,揭示了系统稳态性能与附加噪声、输入信号频率、步长控制参数的关系,为系统应用中的参数选取提供有效指导.最后通过大量的动态和稳态仿真验证了本文建立的统计模型的准确性.

#### 参考文献

[1] Baudrenghien P A. The Adaptive Spectrum Analyzer[D]. Cali-

- ifornia: Standford University Press, 1984.
- [2] Gruber P, Todtli J. Estimation of quasi-periodic signal parameters by means of dynamic signal models[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1994, 42(3): 552 – 562.
- [3] Vaz C, Kong X, Thakor Nitish. An adaptive estimation of periodic signals using a Fourier linear combiner[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1994, 42(1): 1 – 10.
- [4] Xiao Y, Tadokoro Y, Shida K. Adaptive algorithm based on least mean  $p$ -power error criterion for Fourier analysis in additive noise[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1999, 47(4): 1172 – 1181.
- [5] Xiao Y, Ma L, Kreidieh Ward R K. Fast RLS Fourier analyzers capable of accommodating frequency mismatch[J]. Signal Processing, 2007, 87(9): 2197 – 2212.
- [6] Bitmead R R, Tsoi A C, Parker P J. A Kalman filtering approach to short-time Fourier analysis[J]. IEEE Trans on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1986, 34(6): 1493 – 1501.
- [7] 高鹰, 谢胜利. 一种变步长 LMS 自适应滤波算法及分析[J]. 电子学报, 2001, 29(8): 1094 – 1097.  
Gao Y, Xie S L. A variable step size LMS adaptive filtering algorithm and its analysis[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(8): 1094 – 1097. (in Chinese)
- [8] 于霞, 刘建昌, 李鸿儒. 一种变步长凸组合自适应滤波器及其均方性能分析[J]. 电子学报, 2010, 38(2): 480 – 484.  
Yu X, Liu J C, Li H R. A convex combination of variable step-size adaptive filter and its mean-square performance analysis[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(2): 480 – 484. (in Chinese)
- [9] 洪丹枫, 苗俊, 苏健, 吴鑫, 潘振宽. 一种变步长凸组合 LMS 自适应滤波算法改进及分析[J]. 电子学报, 2014, 42(11): 2225 – 2230.  
Hong D F, Miao J, Su J, Wu X, Pan Z K. An improved variable step-size convex combination of LMS adaptive filtering algorithm and its analysis[J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(11): 2225 – 2230. (in Chinese)
- [10] Ban S J, Lee C W, Cho H, et al. A variable step-size adaptive algorithm for direct frequency estimation[J]. Signal Processing, 2010, 90(9): 2800 – 2805.
- [11] 刘立刚, Fukumoto M, 张世永. 一种变步长 proportionate NLMS 自适应滤波算法及其在网络回声消除中的应用[J]. 电子学报, 2010, 38(4): 973 – 978.  
Liu L G, Fukumoto M, Zhang S Y. A variable step-size proportionate NLMS adaptive filtering algorithm and its application in network echo cancellation[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(4): 973 – 978. (in Chinese)
- [12] Huang B, Xiao Y, Sun J, et al. A variable step-size FXLMS algorithm for narrowband active noise control[J]. IEEE Trans on Audio, Speech, and Language Processing, 2013, 21(2): 301 – 312.
- [13] Xiao Y, Huang B, Wei H. Adaptive Fourier analysis using a variable step-size LMS algorithm[A]. Proceedings of Information, Communications and Signal Processing[C]. Beijing: IEEE, 2013. 1 – 5.
- [14] Kwong R H, Johnston E W. A variable step size LMS algorithm[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1992, 40(7): 1633 – 1642.
- [15] Evans J B, Xue P, Liu B. Analysis and implementation of variable step size adaptive algorithms[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1993, 41(8): 2517 – 2535.
- [16] Shin Y K, Lee J G. A study on the fast convergence algorithm for the LMS adaptive filter design[J]. Proc KIEE, 1985, 19(5): 12 – 19.
- [17] Mathews V J, Xie Z. A stochastic gradient adaptive filter with gradient adaptive step size[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1993, 41(6): 2075 – 2087.
- [18] Aboulnasr T, Mayyas K. A robust variable step-size LMS-type algorithm; analysis and simulations[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1997, 45(3): 631 – 639.
- [19] Liu J, Xiao Y, Sun J, et al. Analysis of online secondary-path modeling with auxiliary noise scaled by residual noise signal[J]. IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2010, 18(8): 1978 – 1993.

### 作者简介



温 良 男, 1984 年生于黑龙江鸡西, 任职于中国人民解放军 96361 部队. 哈尔滨工业大学电气工程及自动化学院在读博士研究生. 研究方向为自适应信号处理、主动噪声控制.

E-mail: lwen@hit.edu.cn



黄博妍(通信作者) 女, 1984 年生于黑龙江林口, 哈尔滨工业大学电气工程及自动化学院讲师. 从事自适应信号处理、语音增强及主动噪声控制方面的有关研究.

E-mail: byhuang@hit.edu.cn